

多様体補正法による 人工衛星の軌道積分

総合研究大学院大学D1

梅谷 真史

総研大コロキウム

1. 研究内容

◆ 高精度・高速な

人工衛星の数値積分法の開発

◆ 二体問題 + 地球重力場 (球面調和関数)

ヤコビ積分を保存させる多様体補正法

研究の概要、及び目的

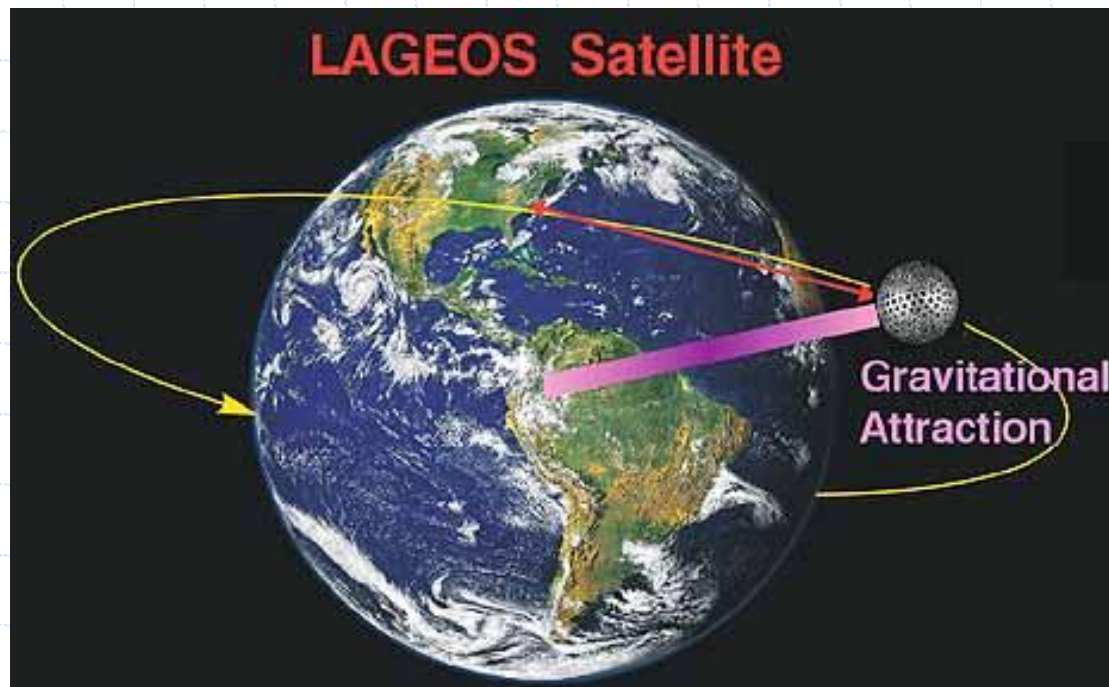
◆人工衛星の軌道運動

- 衛星重力ミッション
- 重力場定数の精度

◆観測

◆モデル化

◆数値積分



軌道半径 約13000km

観測精度 約0.2mm

相対精度 10^{-11}

人工衛星の物理モデル

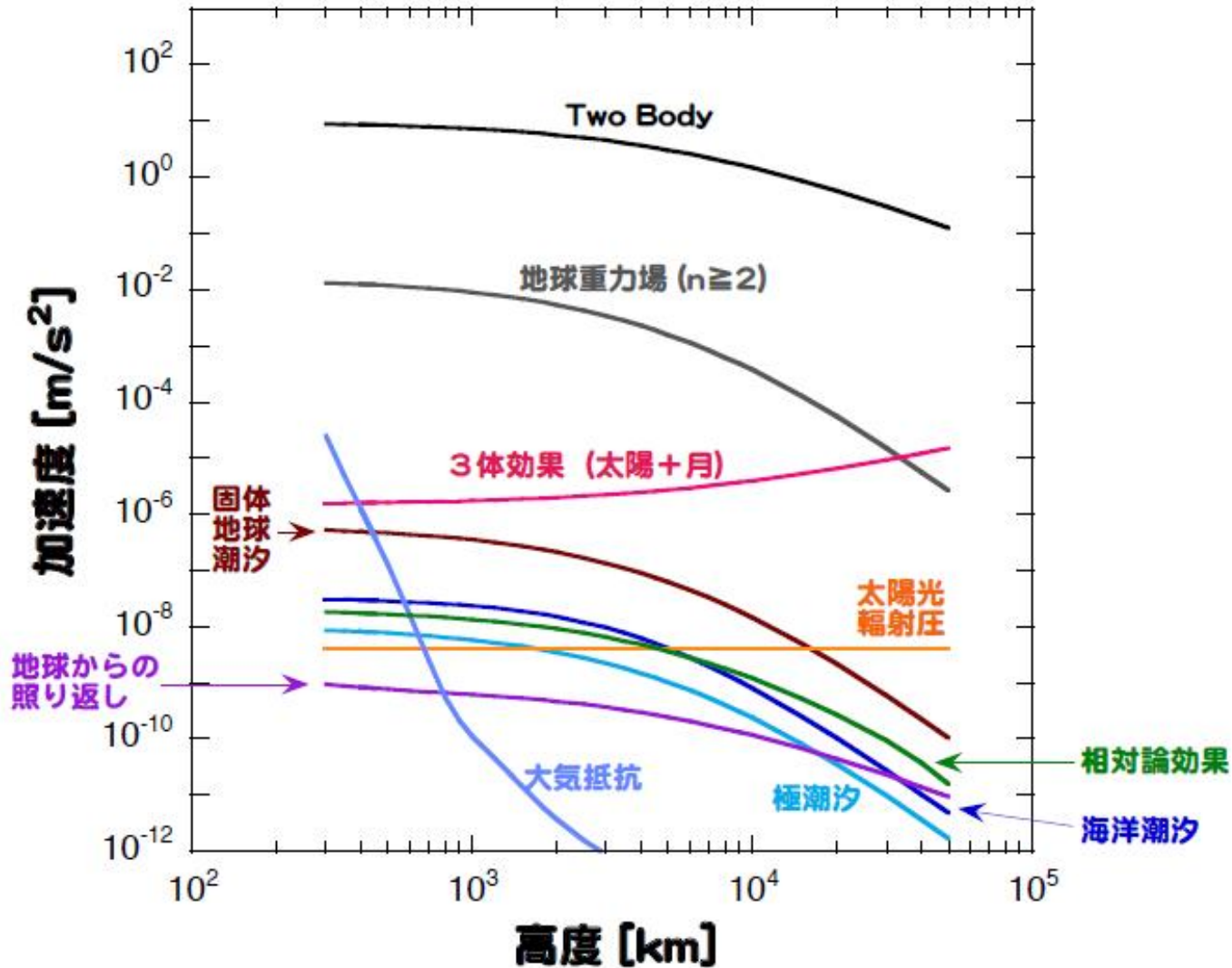
◆ 運動方程式

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{x} + \vec{a}$$

◆ 摂動力

- 地球重力場
- 月、太陽からの摂動
- 空気抵抗
- 固体、海洋潮汐
- 太陽からの輻射圧、地球からの照り返し
- 相対論的效果

地球重力場での各摂動の大きさ



Otsubo, T. (2005)より

重力場係数からわかること

- ◆ 重力場の形状
- ◆ コア、マントルの物理的性質
- ◆ 相対論的効果の検出(Lense-Thirring effect)
- ◆ ヤーコフスキー効果の検出(Yarkovsky-Schach effect)
- ◆ 地震波の解析
- ◆ 海洋運動

数値積分法

◆ ルンゲ・クッタ法

- 長所: アルゴリズムが簡単
- 短所: 誤差が時間の二次成長

◆ 線形多段法

- 長所: 高速
- 短所: 誤差が時間の二次成長

◆ シンプレクティック積分法

- 長所: 誤差成長が線形成長
- 短所: 散逸系に適用不可

◆ 時間対称型公式

- 長所: 誤差が時間の線形成長
- 短所: 時間非対称な系に適用不可

メタ数値積分法

◆数値解の補正により高精度化を実現

■ 外挿法

- ◆ 長所: 高精度
- ◆ 短所: 実行速度が遅い

■ 多様体補正法

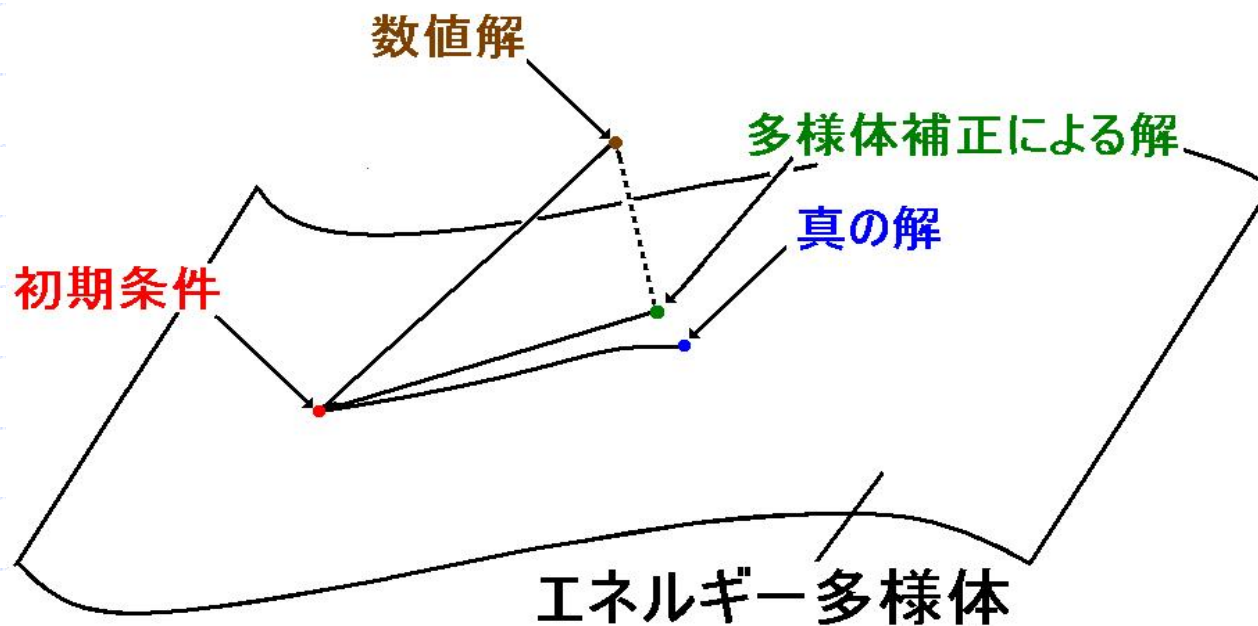
- ◆ 長所: 高精度
- ◆ 短所: 積分する系に依存する

多様体補正法

Nacozy, P.E. (1971), Murison, M.A. (1989), Fukushima, T. (2003)

◆系の準保存量(多様体) **保存させる**

- 例. 力学におけるエネルギー保存



二体問題の数値積分 (Fukushima, T. 2003)

◆ 運動方程式

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{x}$$

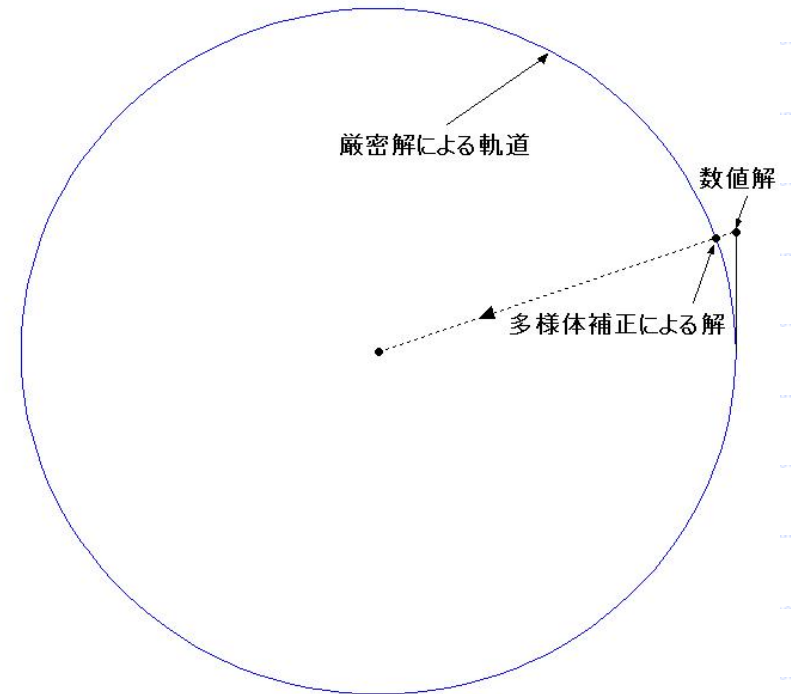
◆ エネルギー

$$E = \frac{1}{2} \vec{v}^2 - \frac{\mu}{r}$$

◆ 補正法

$$(\vec{x}, \vec{v}) \rightarrow (s\vec{x}, s\vec{v})$$

$$\frac{1}{2} \vec{v}^2 s^3 - Es - \frac{\mu}{r} = 0$$

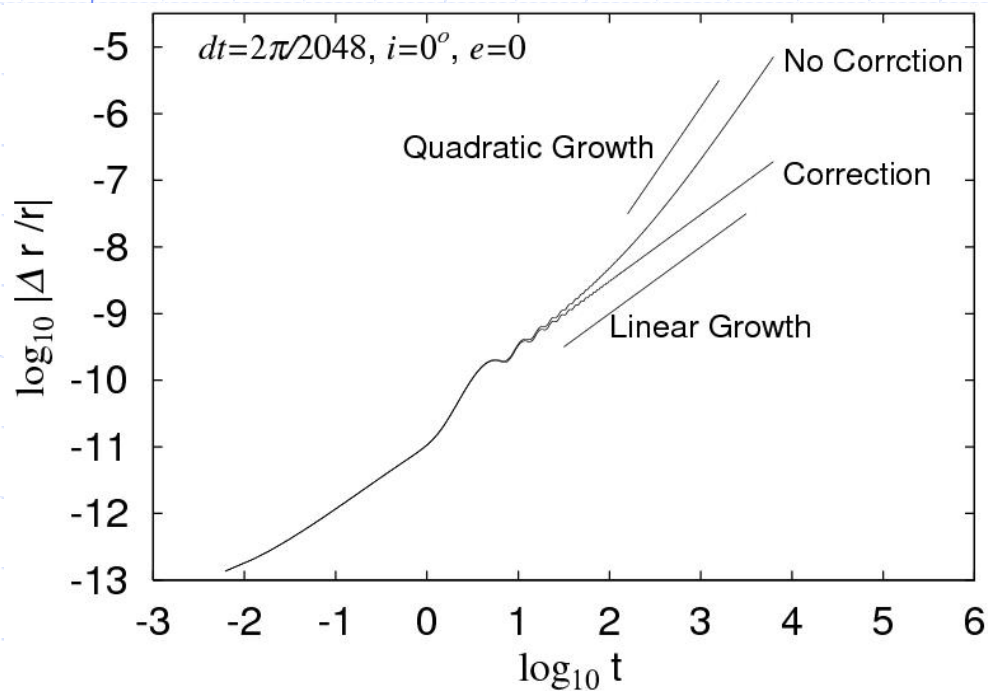


軌道長半径aと
エネルギーEの関係

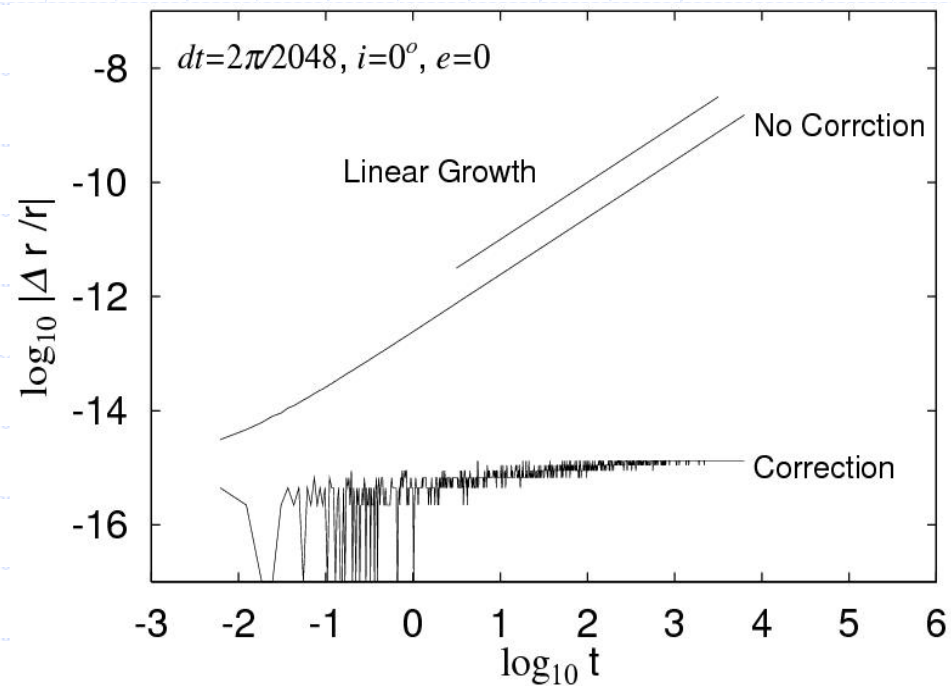
$$E = -\frac{\mu}{2a}$$

二体問題における誤差成長

◆ ルンゲクッタ法



位置の誤差



エネルギーの誤差

2. 人工衛星の軌道運動への適用

◆ 人工衛星のポテンシャル

■ 軸対称摂動ポテンシャル

$$V = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \phi)$$

■ 球面調和関数ポテンシャル

$$V = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_E}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda))$$

全エネルギーによる多様体補正

◆ 運動方程式

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{|\vec{r}^3} \vec{r} + \frac{dV(\vec{r})}{d\vec{r}} + \vec{a}, \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}$$

$$V(\vec{r}) = V_S(\vec{r}) + V_A(\vec{r})$$

◆ 全エネルギー

$$E = \frac{1}{2} \vec{v}^2 - \left[\frac{\mu}{|\vec{r}|} + V(\vec{r}) \right], \quad \frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{a}$$

◆ 角運動量の z 成分

$$L_z = xv_y - yv_x, \quad \frac{dL_z}{dt} = x \left(\frac{\partial V_A}{\partial y} + a_y \right) - y \left(\frac{\partial V_A}{\partial x} + a_x \right)$$

補正法 その1

◆補正式(単スケール変換)

$$(\vec{x}', \vec{v}') = (s\vec{x}, s\vec{v})$$

◆ s の決定(全エネルギー保存より)

$$\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right)s^2 - E - \left(\frac{\mu}{|\vec{r}|}\right)\frac{1}{s} - V(s\vec{r}) = 0$$

ニュートン法を使用

初期値: $s = 1$

補正法 その2

◆ 補正式(二重スケール変換)

$$(x', y', z'; v'_x, v'_y, v'_z) = (s_p x, s_p y, s_z z; s_p v_x, s_p v_y, s_z v_z)$$

◆ s_p の決定 (角運動量z成分保存より)

$$L_z = x'v'_y - y'v'_x \Rightarrow s_p = \sqrt{\frac{L_z}{xv_y - yv_x}}$$

◆ s_z の決定 (全エネルギー保存より)

$$\left(\frac{1}{2}v_z'^2\right)s_z^2 - \frac{\mu}{r(s_z)} + V(x', y', s_z z) + C = 0$$

$$r(s_z) = \sqrt{x'^2 + y'^2 + s_z^2 z^2}, \quad C = \left(\frac{v_x'^2 + v_y'^2}{2}\right) - E$$

ニュートン法を使用

初期値: $s_z = 1$

ヤコビ積分による多様体補正

◆運動方程式

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}_x, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} + a$$

$$V = -\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{R_e^n}{r^{n+1}} P_n^m(\sin \phi) (C_{n,m} \cos(m\lambda) + S_{n,m} \sin(m\lambda))$$

◆ヤコビ積分

$$C = \frac{1}{2} \vec{v}_x^2 - \omega^2 (X^2 + Y^2) - \frac{\mu}{r} + V$$

補正法

◆ 単スケール変換

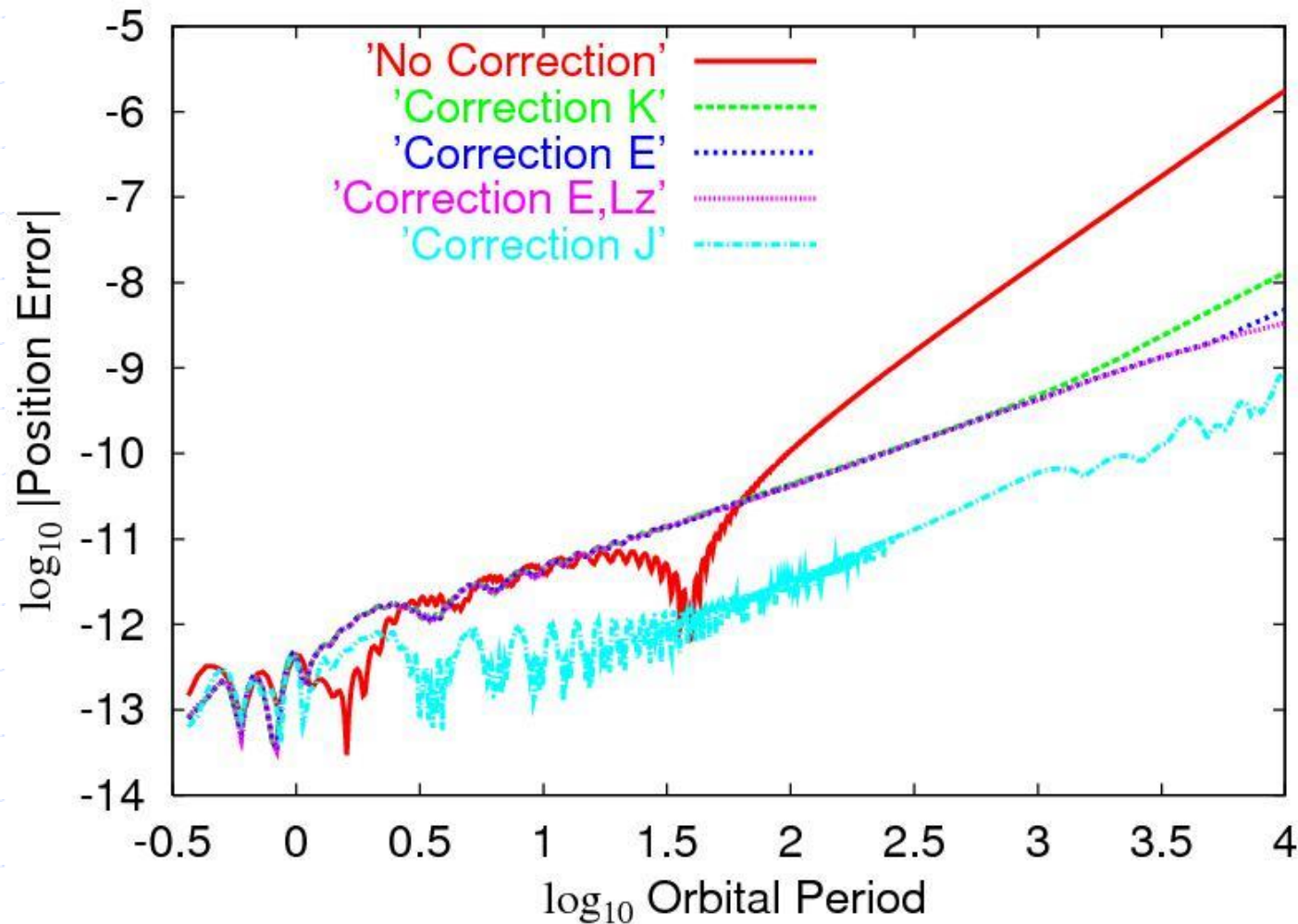
$$(\vec{x}, \vec{v}_x) \rightarrow (s\vec{x}, s\vec{v}_x)$$

◆ S の決定 (ヤコビ積分の保存)

$$\frac{1}{2} \vec{v}_x^2 s^2 - \omega^2 (X^2 + Y^2) s^2 - \frac{\mu}{rs} + V(rs) - C = 0$$

- ニュートン法を用いる 初期値: $s = 1$

数値実験 n=10まで



11次の線形多段法
(陰的アダムス法)

$$a = 2$$

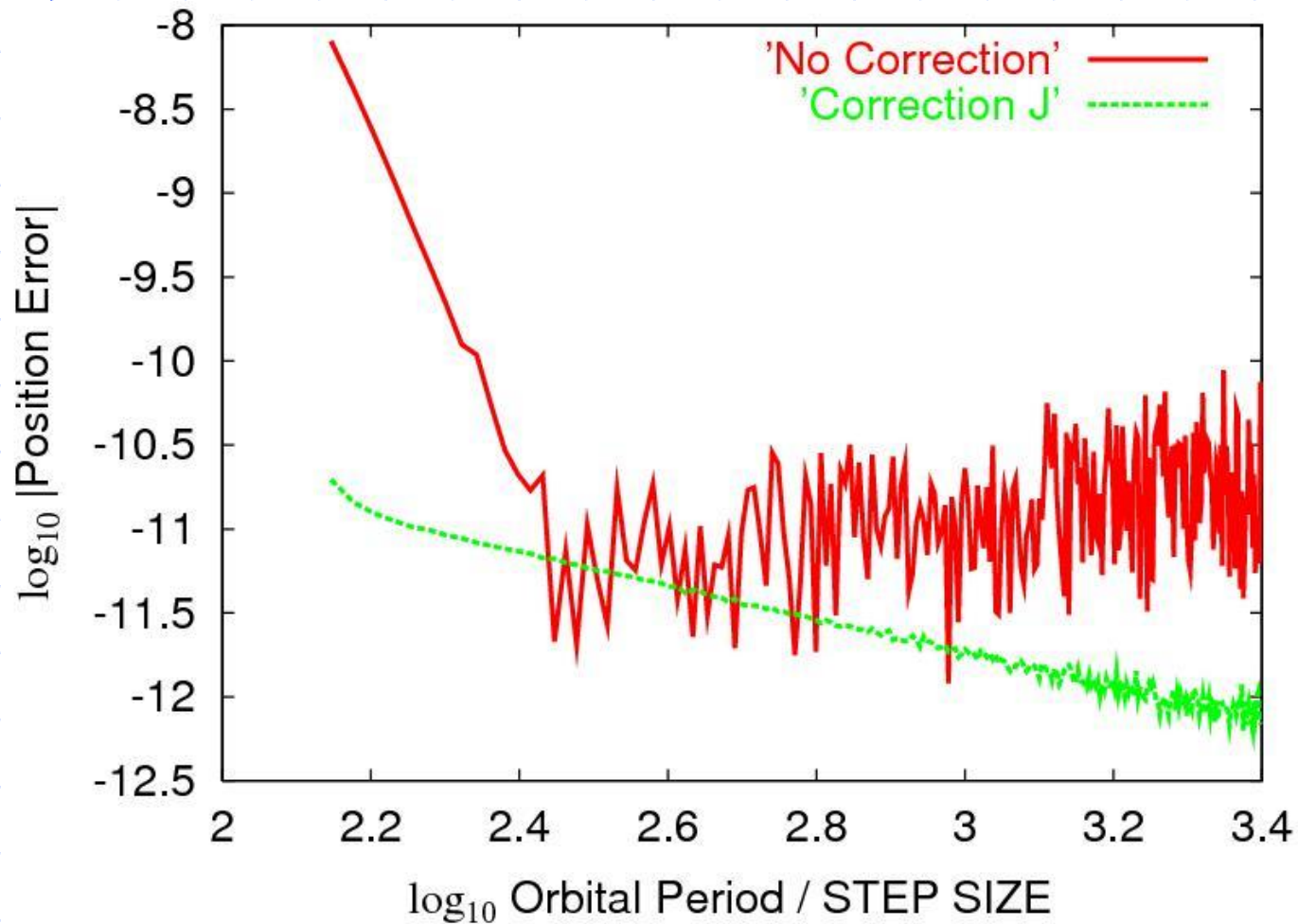
$$R_e = 1$$

$$e = 0$$

$$I = 45^\circ$$

$$dt = \text{Period} / 180$$

100周期後の誤差



11次の線形多段法
(陰的アダムス法)

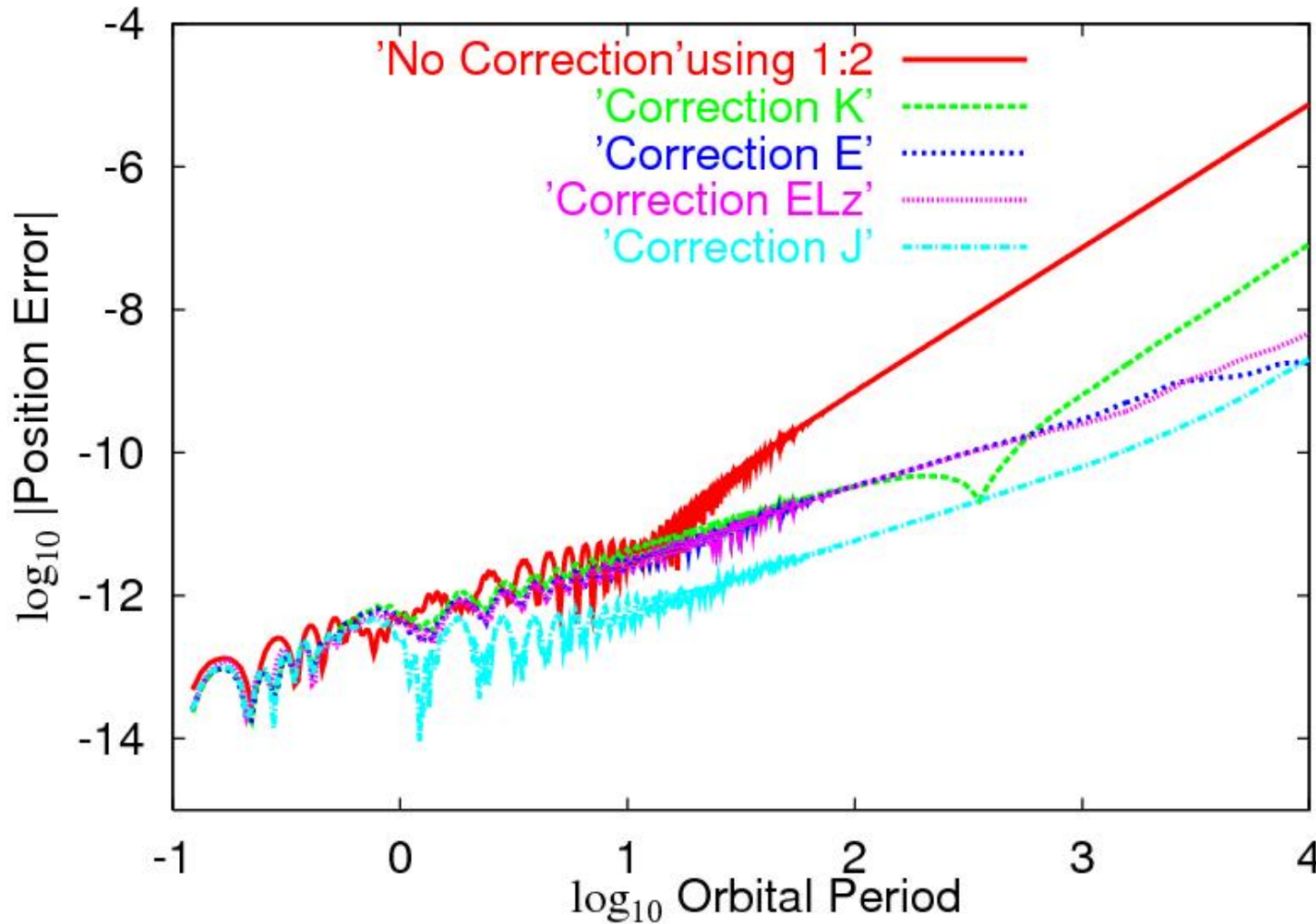
$$a = 2$$

$$R_e = 1$$

$$e = 0$$

$$I = 45^\circ$$

LAGEOS



11次の線形多段法
(陰的アダムス法)

$$a = 1.92$$

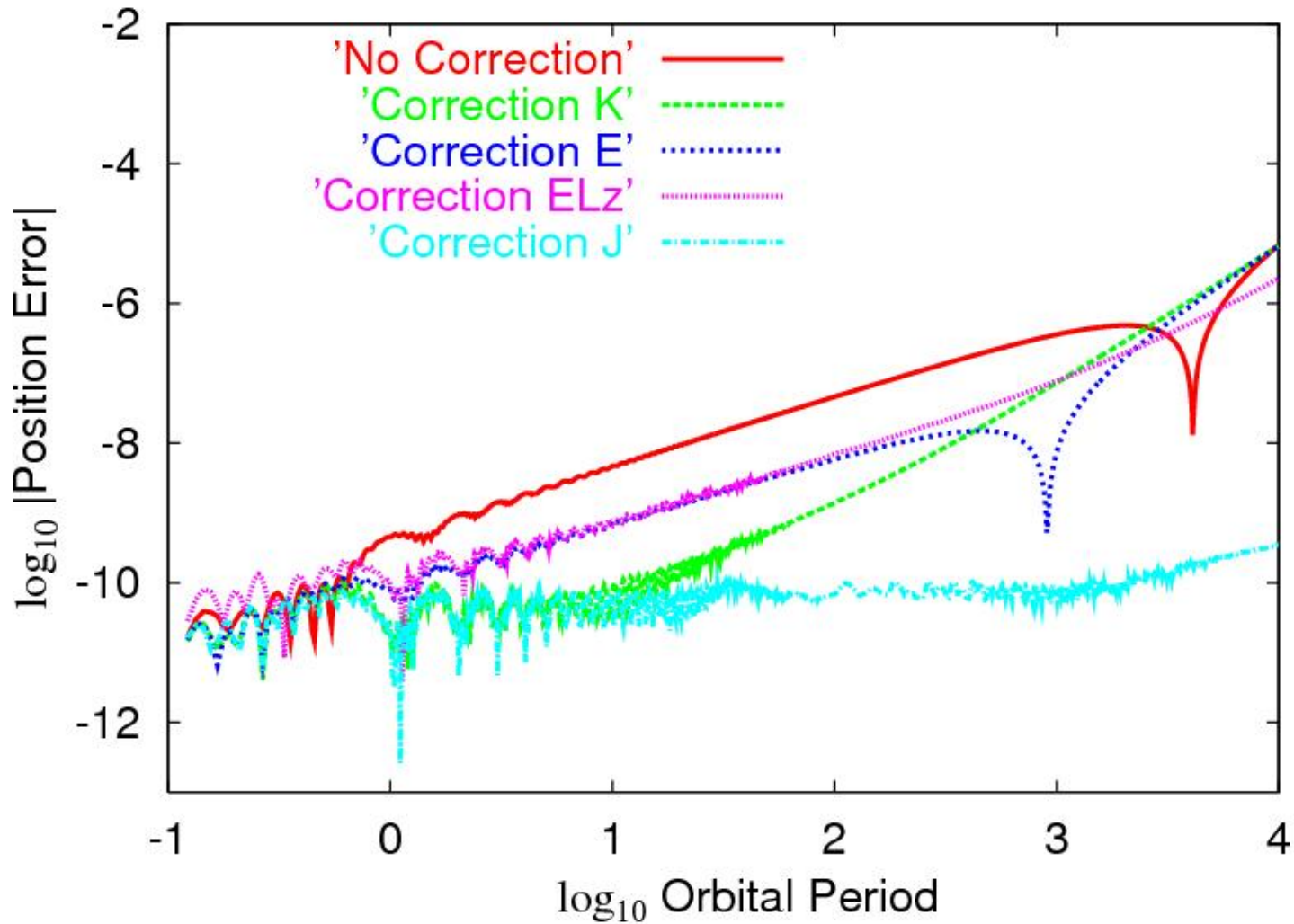
$$R_e = 1$$

$$e = 0.004$$

$$I = 109^\circ$$

$$dt = \text{Period} / 256$$

GRACE



11次の線形多段法
(陰的アダムス法)

$$a = 1.07$$

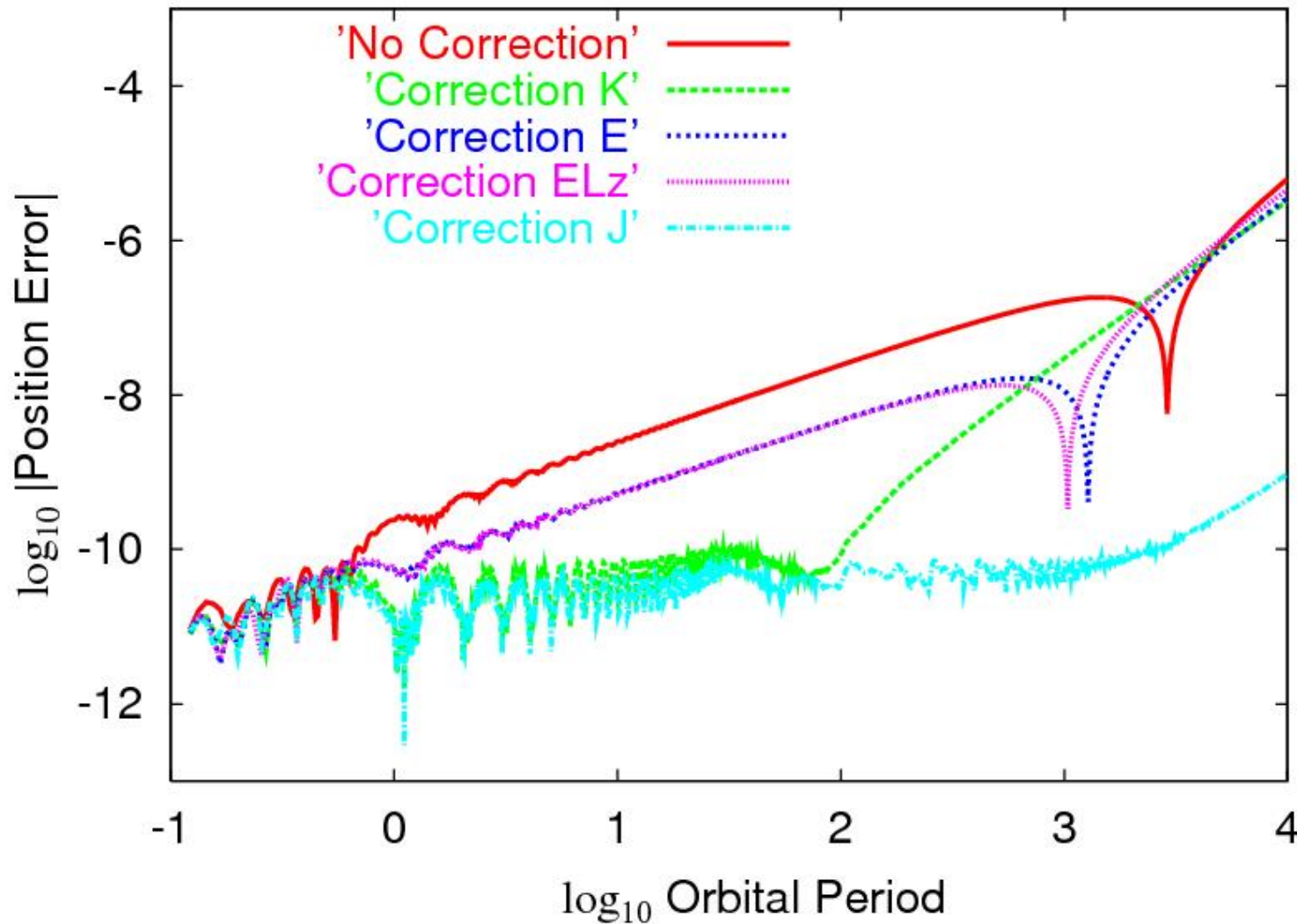
$$R_e = 1$$

$$e = 0.0015$$

$$I = 89^\circ$$

$$dt = Period / 180$$

HINODE



11次の線形多段法
(陰的アダムス法)

$$a = 1.10$$

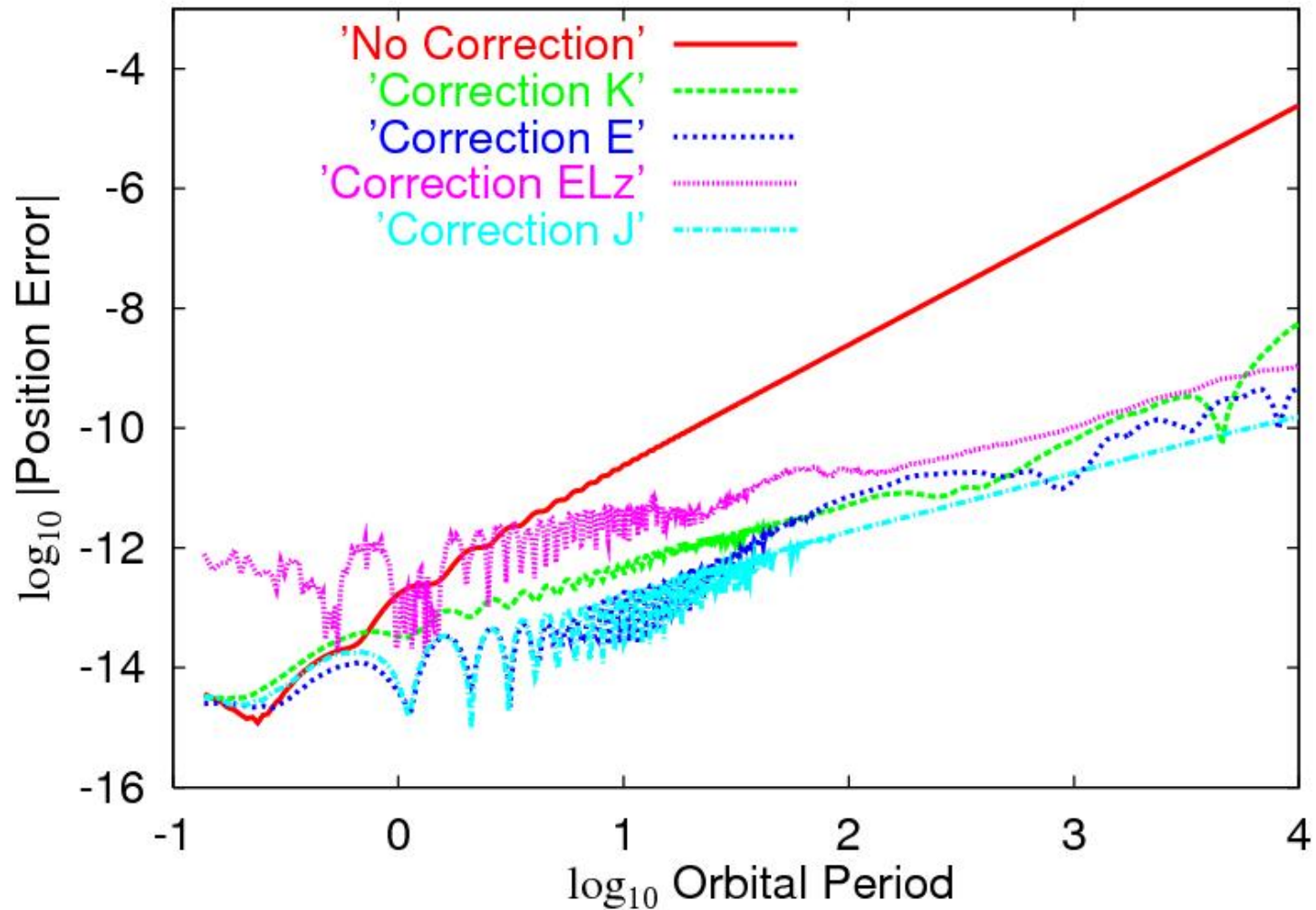
$$R_e = 1$$

$$e = 0.0015$$

$$I = 98^\circ$$

$$dt = \text{Period} / 180$$

HIMAWARI6



11次の線形多段法
(陰的アダムス法)

$$a = 6.61$$

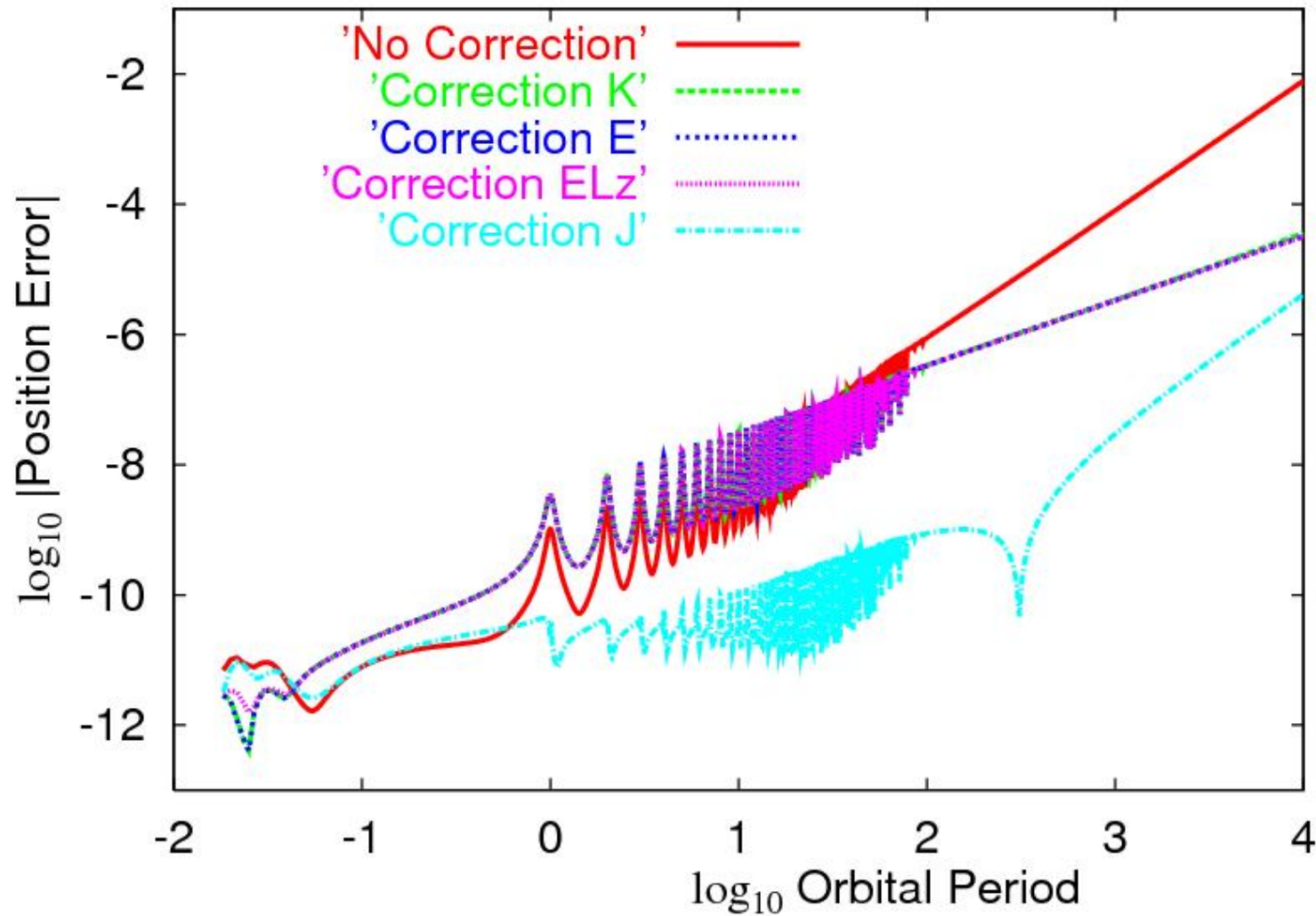
$$R_e = 1$$

$$e = 0.019$$

$$I = 0.06^\circ$$

$$dt = \text{Period} / 180$$

HARUKA



11次の線形多段法
(陰的アダムス法)

$$a = 2.70$$

$$R_e = 1$$

$$e = 0.61$$

$$I = 31^\circ$$

$$dt = \text{Period} / 1200$$

3. 結論

全エネルギーによる補正より

ヤコビ積分の補正が高精度となる

◆ 多様体補正法の効果

- 誤差成長の低減
- 丸め誤差の低減
- 安定性の向上

4. 今後の発展

◆ より現実的なモデルへの適用

- 空気抵抗
- 月、太陽からの摂動
- 太陽から輻射圧
- 地球からの照り返し
- 固体潮汐、海洋潮汐

を含む高精度・高速なアルゴリズムの開発

◆ 離心率の高い人工衛星の高精度化